トーラス多様体上の余次元 0 または 1 の軌道を持つコンパクト群作用の分類 (CLASSIFICATION OF COMPACT GROUP ACTIONS ON TORUS MANIFOLDS WHICH HAVE CODIMENSION 0 OR 1 ORBITS)

黒木　慎太郎 (SHINTARÔ KUROKI)

Abstract. $2n$ 次元の多様体 M でその半分次元のトーラス T がある条件を満たして作用しているものをトーラス多様体 (M, T) と言いう。この講演では、どの (M, T) が変換群 (M, G) へ拡張可能かどうかについて講演する。ここで G は極大トーラスとして T を持つコンパクトリー群とし、変換群 (M, G) は余次元 0 の軌道を持つ（推移的に作用する）か余次元 1 の軌道を持って作用するものとする。

The torus manifold (M, T) is a $2n$-dimensional manifold M and has some n-dimensional torus T acion. In this talk we study the question of what torus manifolds (M, T) can have an extension (M, G) with codimension zero (transitive) or codimension one principal orbits and classify such (M, G), where G is a compact Lie group which has T as a maximal toral subgroup.

1. トーラス多様体

$2n$ 次元の向きつけられたコンパクト連結多様体 M とその上に作用する n 次元のトーラス[1]T との組を (M, T) と書く。(M, T) が次の三つの条件を満たす時にトーラス多様体 [Ha-Ma03] と言う。

(1) T の作用は効果的かつ滑らかである。
(2) T 作用による不動点集合 M^T が空ではない（自動的に M^T は有限集合になる）。
(3) M が omnioriented.

T の作用が効果的とは M の全ての点を動かさない T の元が単位元のみ（$\cap_{x\in M} T_x = \{e\}$）のときをいい[2]、滑らかとは作用を定義する写像 $T \times M \to M$ が可微分写像になる時を言う（もちろん T はリー群なので群の構造だけでなく可微分多様体の構造も持っている）。また、不動点集合とは $M^T = \{x \in M \mid T(x) = x\}$ なる T 作用で動かない M の点の集合の事である。最後に T の作用を持つ多様体 M が *omnioriented* であることを定義しておく。まず M の特性部分多様体 M_i とは次の三つの条件を満たす部分多様体のことである。

- $\dim M_i = 2n - 2$.
- $M_i = (M^C)^o$, つまり T の部分群 $C(\simeq S^1)$ による不動点集合の連結成分。

The author was partially supported by OCAMI (Osaka City university Advanced Mathematical Institute) and the Fujyukai fundation.

[1] n 次元のトーラスと言うのは群 S^1 の n 個の直積の事、つまり n 次元のコンパクトな可換リー群のことである。

[2] 作用から定義される表現 $T \to \mathrm{Diff}(M)$ が単射になると言い換えられる（$\mathrm{Diff}(M)$ とは M 上の微分同相写像全体)。

- $M_i \cap M^T \neq \emptyset$.

M に対する向きと全ての特性部分多様体 M_i に対する向きが指定されている時 M は omnioriented と呼ばれる。今回の研究では omnioriented の条件は本質的ではないので条件 (1),(2) を満たすものを**トーラス多様体**と呼ぶことにする。以下にいくつか例をあげる。

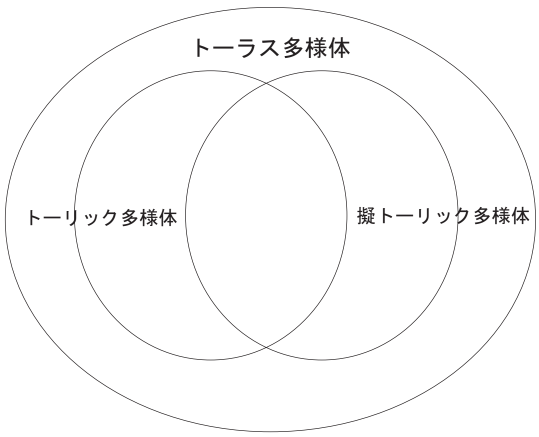
Example 1. T の元 $(t_1, \cdots, t_n)$ を複素射影空間 $\mathbb{C}P(n)$ の斉次座標 $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ の後ろの n コの成分に掛ける $[z_0 : t_1 z_1 : \cdots : t_n z_n]$。これで定義された作用で $(\mathbb{C}P(n),\ T)$ はトーラス多様体になる。

Example 2. トーリック多様体 [小田 85] や擬トーリック多様体 [Da-Ja91], [Bu-Pa02] はトーラス多様体。

ここで、M がトーリック多様体[3]とは、M が複素 n 次元正規代数多様体で $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもち、その作用が稠密な軌道を持つとき（つまり $(\mathbb{C}^*)^n$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ への自然な作用が M へ拡張しているとき）のことを言う。$(\mathbb{C}^*)^n$ の極大コンパクト群が T なので、T への制限作用によりトーラス多様体だと思える。

また、M が擬トーリック多様体とは、M は 2n 次元の多様体で n 次元のトーラス作用を持ち、その作用の軌道空間 M/T が単純凸多面体で不動点集合 M^T の各点の近傍での T 作用が *locally standerd*（$\mathbb{C}^n$ への自然な T 作用と同型）の時を言う[4]。この T 作用によって擬トーリック多様体はトーラス多様体になる。今後トーリック多様体と擬トーリック多様体をあわせて（擬）トーリック多様体と呼ぶことにする。

トーラス多様体と（擬）トーリック多様体との関係は以下の図に示したようになっている。



上図における（擬）トーリック多様体の各領域に入る多様体については [Bu-Pa02] に詳しく書いてある。次の例は簡単な例だがトーラス多様体の重要な例である。

Example 3. 2n 次元の球面 $S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R} (\simeq \mathbb{R}^{2n+1})$ に対して、T を $\mathbb{C}^n$ への標準的な掛け算と思って T の S^{2n} 上への作用を定義すると $(S^{2n},\ T)$ はトーラス多様体。$n \geq 2$ ならばこれは（擬）トーリック多様体でない例になっている。

[3]以後コンパクトで非特異な物のみを考える。

[4]M に概複素構造が入るとは限らないことに注意する。つまり、トーリック多様体とは異なるものも擬トーリック多様体になる。

以上よりトーラス多様体は（擬）トーリック多様体の位相幾何的な一般化であることがわかる[5]。今回はこのトーラス多様体について次の章にあるような問題を考え Theorem A と Theorem B を得た。

2. 問題と結果

Demazure は1970年にトーリック多様体 M に関する $\mathrm{Aut}(M)$ の構造に関して研究を行った [De70]。もちろん M に元々作用していた $(\mathbb{C}^*)^n$ は $\mathrm{Aut}(M)$ の中に含まれている。Demazure の研究を次のような問題として見直してみよう。

Problem 1. トーリック多様体 M 上の $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用はどんな群 G の作用に拡張するか？

Demazure の研究は代数幾何的に最も広い $G(=\mathrm{Aut}(M))$ の構造を研究しているといえる。トーラス多様体についてこの問題はどうなるであろうか？代数的なトーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の極大なコンパクト群 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ が位相的なトーラスに当たる物であるので、次のように言い換えることができる。

Problem 2. トーラス多様体 (M, T) の T 作用はどんな群 G の作用へ拡張するか？

位相幾何的に最も広い G は同相写像全体 $\mathrm{Homeo}(M)$ であるがその構造をいきなり考えるのは難しいので、今回の講演では研究しやすいように制限をつけた次の問題を考えてみる。

Problem 3. コンパクトリー群 G は T を極大可換部分群（極大トーラス）として含み変換群 (M, G) は推移的または余次元一の主軌道をもつものとする。G 作用を T へ制限した変換群 (M, T) がトーラス多様体になるような変換群 (M, G) を分類せよ。

ここで推移的な作用とは G 作用によって一点の軌道が M と一致する時のことを言う。この場合ある部分群 H で $M \cong G/H$ となることがわかる。余次元一の主軌道を持つとは次元が最も高い軌道（主軌道）の次元が $\dim M - 1$ に一致する時のことを言う。それぞれの場合について Problem 3 を解いていこう。

2.1. 推移的な場合.

この場合は次の結果からリー群論の範疇に入る問題になる。リー群論に関しては [戸田-三村] を参照のこと。

Theorem 2.1 ([Gu-Ho-Za06]). M に G が推移的に作用すると仮定すると、次は同値。

(1) (M, T) が GKM 多様体（T は G の極大トーラスとする）。
(2) $\chi(M) = \sum_i \mathrm{rank}\, H^i(M) \neq 0$.
(3) $M = G/H$ で H は G の閉連結部分群で T を含む（このような H を最大階数部分群と言う）。

[5] トーラス多様体の定義からわかるようにトーラス多様体には作用の仮定があるのみで、代数的な構造や局所的な構造をほとんど仮定していない。ここでは構造を忘れるような方向に一般化することを位相幾何的な一般化と呼んでいる。また紙数の都合により省略するがトーラス多様体から多重扇（multi-fan）と言うものが定義できる [Ha-Ma03]。多重扇とはコーンが重複を持ってもよいように扇を一般化した物である。トーリック多様体が扇と一対一に対応することと異なりトーラス多様体と多重扇は一対一には対応していない。トーラス多様体については [Ha-Ma03] と [枡田 06] を参照のこと

GKM 多様体とは不動点と一次元軌道の集合の軌道空間が、不動点を頂点、その間を結ぶ一次元軌道の集合を辺とみなすことで、グラフになるような物のことを言う。トーラス多様体は GKM 多様体になっているのでこの定理を満たしている。よって推移的な場合は次の問題を解けばよい。

Problem . コンパクト連結リー群 G とその最大階数部分群 H の組 (G, H) を分類せよ。但し、G の極大トーラス T に対して $(G/H, T)$ がトーラス多様体になるものとする（つまり $n = \dim T = \frac{1}{2}\dim G/H = \frac{1}{2}(\dim G - \dim H)$ を満たすとする）。

リー群論の結果を使ってこの問題を解こう。

Fact 2.2. G をコンパクトリー群とすると、有限被覆を取って $\hat{G} = G_1 \times \cdots \times G_k \times T'$ の形にすることができる。また $H \subset G$ が最大階数部分群なら $\hat{H} = H_1 \times \cdots \times H_k \times T'$ とできる。ここで G_i は単連結単純リー群で H_i はその最大階数部分群、T' はトーラス。

よって分類したい $(G/H, T)$ は $(G_1/H_1 \times \cdots \times G_k/H_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ の形になることがわかる。ここで T_i は G_i と H_i に含まれる極大トーラスである。次の補題が成立している。

Lemma 2.3. もしも $(G/H, T)$ がトーラス多様体なら、それぞれの $(G_i/H_i, T_i)$ $(i = 1, \cdots, k)$ はトーラス多様体（つまり $2\dim T_i = \dim G_i/H_i$）になる。

省略して書くが、次のリー群論の基本的な大定理を使えば分類はすぐに完成する。

Fact 2.4. G_i を単連結単純リー群、H_i をその最大階数部分群とすると、(G_i, H_i) は全て分類されている。

以上から次の定理が成り立つ。

Theorem A . G をコンパクト連結リー群とし、T をその極大トーラスとする。トーラス多様体 (M, T) が推移的な変換群 (M, G) に拡張するなら、 M と G は次のような物になる。

$$M \cong \prod_{i=1}^{a} \mathbb{C}P(l_i) \times \prod_{j=1}^{b} S^{2m_j}, \quad G \approx \prod_{i=1}^{a} SU(l_i + 1) \times \prod_{j=1}^{b} SO(2m_j + 1),$$

但し、$\approx$ でリー環が同型と言う意味、$\mathbb{C}P(l_i)$ は $2l_i$ 次元の複素射影空間、S^{2m_j} は $2m_j$ 次元の球面。

また G の M への作用は標準的なものであり、$\sum_{i=1}^{a} l_i + \sum_{j=1}^{b} m_j = n = \dim T = \frac{1}{2}\dim M$ を満たす。

2.2. **余次元一の主軌道を持つ場合.** 推移的な場合はほとんどリー群論の大定理を用いることで分類が完成した。研究として面白くなるのは余次元一の主軌道を持つ場合からである。この場合はリー群論だけでは解けない。変換群論が必要になる。変換群論については [Br72] と [川久保 87] を参照のこと。

最初に変換群論において最も基本的な可微分スライス定理を準備する。

Theorem 2.5 (可微分スライス定理)**.** G をコンパクトなリー群、M を滑らかな G 作用を持つ多様体とする。その時任意の $x \in M$ の軌道 $G(x) \cong G/K$ に対して閉不変管状近傍 X が存在し、以下の多様体と G-微分同相になる。

$$X \cong G \times_K D_x = (G \times D_x)/K$$

但し D_x は閉円盤（次元は $\dim M - \dim G(x)$）で K がスライス表現 $\sigma : K \to O(D_x)$ を通して作用している。

次の定理を用いるためにトーラス多様体のコホモロジーが $H^1(M;\mathbb{Z}_2) = 0$ となることを仮定しておこう。

Theorem 2.6 ([Br72], [Uc77])**.** G をコンパクト連結リー群、M をコンパクトな多様体で $H^1(M;\ \mathbb{Z}_2) = 0$ を満たし、G が M に滑らかに作用しているとする。もしも G 作用が余次元一の軌道を持てば、 その軌道 $G(x) \cong G/K$ は主軌道となり、(G, M) はちょうど二つの特異軌道 $G(x_1) \cong G/K_1$ と $G(x_2) \cong G/K_2$ を持つ。また $G(x_s)$ の閉不変管状近傍 X_s $(s = 1, 2)$ について以下が成り立つ。

- $M = X_1 \cup X_2$,
- $X_1 \cap X_2 = \partial X_1 = \partial X_2$.

つまりこの問題の中に出てくる軌道の型は余次元 1 の主軌道 G/K と二つの特異軌道 G/K_1, G/K_2 の三種類になることがわかる（特異軌道とは主軌道よりも次元の低い軌道のこと）。まずは特異軌道についてどうなるのかを考えてみよう。次の補題が成立する。

Lemma 2.7. T 作用による不動点 $p \in M^T$ の軌道は特異軌道になる。

Proof. p 上の軌道 $G(p)$ のイソトロピー群を考えれば $T \subset G_p$ になっている。よって G_p は最大階数部分群なので G/G_p の次元は偶数になるのでこれは特異軌道。 □

この補題から次がわかる。

Lemma 2.8. 不動点 $p \in M^T$ の軌道を G/K_1 とすると、T ある部分群 T'' によって $(G/K_1,\ T/T'')$ はトーラス多様体になる。

つまり、少なくとも一つの特異軌道 G/K_1 に対しては推移的な場合の分類（Theorem A）を用いることができて、軌道型が完全にわかる。また次の補題が成立する。

Lemma 2.9. $G = G' \times G''$, $K_1 = K_1' \times G''$ と分解できて、*Lemma 2.8* の T'' は G'' の極大トーラスになる。また G'' は G/K_1 の閉不変管状近傍の一つのファイバー D^{2k_1} の境界 $\partial D^{2k_1} \cong K_1/K$ に推移的に作用する。

よって G'' の形が球面に推移的に作用するコンパクトリー群の分類 [Hs-Hs65] からわかるので、G/K_1 を調べることで G と K_1 の形を完全に知ることができる。

次のステップでやることは、G/K_2 がトーラス多様体になるかどうかで場合わけをして考えていくことである。簡単のために本稿では G/K_2 がトーラス多様体になる場合のみを考える。もしも $(M,\ T)$ が（擬）トーリック多様体ならば、$(G/K_1)/T$ が M/T の次元の低い面を張ることを考慮すれば G/K_2 もトーラス多様体となることがわかる。

よって、二つの特異軌道 $G/K_1, G/K_2$ に対して先の議論を適用すると、次のようになる。

Lemma 2.10. $(G,\ K_j)$（$j = 1, 2$）は次のいずれか。

$$(G' \times Spin(2k_j),\ K_j' \times Spin(2k_j))$$
$$(G' \times SU(k_j) \times T^1,\ K_j' \times SU(k_j) \times T^1)$$

但し、G'/K_j' は *Theorem A* に出てくる多様体になる。

$j=1,2$ と Lemma 2.10 から 4 つの場合になることがわかる。

次のステップでやることは得た 4 つの場合に対して、スライス表現 $\sigma_j : K_j \to O(2k_j)$ を計算し（$2k_j = \dim M - \dim G/K_j$）閉不変管状近傍 X_j を全てピックアップすることである。そして X_1, X_2 の境界の張り合わせ f を考えて G 多様体 $X_1 \cup_f X_2 = M(f)$ を実際に構成する。構成した多様体が G 微分同相かどうかは次の補題で調べることができる。

Lemma 2.11. 次のいずれかが成立すれば $M(f) \cong M(f')$（G 微分同相）。

(1) f が f' に *G-diffeotopic*
(2) $f^{-1}f'$ が *G-equivariant diffeomorphism on* X_1 に拡張可能
(3) $f'f^{-1}$ が *G-equivariant diffeomorphism on* X_2 に拡張可能

以上により次の結果を得る。

Theorem B . G をコンパクト連結リー群とし、T をその極大トーラス、$H^1(M;\mathbb{Z}_2)=0$ とする。トーラス多様体 $(M,\ T)$ が余次元 1 の軌道を持つ変換群 $(M,\ G)$ に拡張するなら、 M と G は次のような物になる。

$$M \cong G \times_H P(\mathbb{C}^{k_1}_\alpha \oplus \mathbb{C}^{k_2}), \quad G \approx G' \times S(U(k_1) \times U(k_2)),$$
$$M \cong G \times_H S(\mathbb{C}^{k}_\alpha \oplus \mathbb{R}), \quad G \approx G' \times U(k),\ k = k_1 = k_2 \text{ or}$$
$$M \cong G \times_H S(\mathbb{C}^{k_1}_\alpha \oplus \mathbb{R}^{2k_2+1}), \quad G \approx G' \times U(k_1) \times SO(2k_2)$$

但し、$G/H \cong G'/H' \cong \prod_{i=1}^{a} \mathbb{C}P(l_i) \times \prod_{j=1}^{b} S^{2m_j}$ で、H はファイバーにスライス表現から決まる表現を通して作用する。

Theorem B の最後の場合が G/K_2 がトーラス多様体にならない場合である。
自動的に次の系が導ける。

Corollary B . *Theorem B* の仮定の下 $(M,\ T)$ を（擬）トーリック多様体とすると、M と G は次のように書ける。

$$M_\alpha \cong (\prod_{h=1}^{a} (\mathbb{C} - \{0\})^{l_h}) \times_{(\mathbb{C}^*)^a} P(\mathbb{C}^{k_1}_\alpha \oplus \mathbb{C}^{k_2}),$$
$$G \approx \prod_{i=1}^{a} SU(l_i+1) \times S(U(k_1) \times U(k_2))$$

G は M に標準的に作用し $\sum_{i=1}^{a} l_i + k_1 + k_2 - 1 = n = \dim T$ である。
但し $(\mathbb{C}^*)^a$ は $P(\mathbb{C}^{k_1}_\alpha \oplus \mathbb{C}^{k_2})$ の $\mathbb{C}^{k_1}_\alpha (= \mathbb{C}^{k_1})$ 成分に次の $\mathbb{C}^*$ への表現を通してスカラー倍で作用する。

$$(\mathbb{C}^*)^a \ni (t_1, \cdots, t_a) \mapsto t_1^{\alpha_1} \cdots t_a^{\alpha_a} \in \mathbb{C}^*$$

ここで $\alpha = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_a) \in \mathbb{Z}^a$。

Corollary B で出てきた多様体は Hirzebruch 曲面の一般化と見ることもできる。実際 $k_1 = k_2 = a = 1 = l_1$ の場合が Hirzebruch 曲面である。

3. 今後の課題

最後に今後の課題を述べて終わりにしたい。

3.1. 余次元２以上の主軌道をもつ場合. 今回の研究は推移的（余次元０の軌道を持つ）、余次元１の軌道を持つ場合の分類だった。これらの分類が成功した理由は軌道空間 M/G の構造が大変簡単だった事にある（推移的なら一点、余次元１なら円か区間）。

余次元２以上となると、軌道空間 M/G の構造がより複雑になる（余次元２なら多角形が出てくる）。その上、管状近傍同士の張り合わせも複雑なために一般に分類するのは難しい。だが最も簡単な余次元２の場合にさえ、$(M,\ T)$ の $\dim M = 4$ の場合の分類を含む結果になる。これの意味することは、出てくる M は球面と複素射影空間とを組み合わせたバンドルの構造だけではないと言うことである[6]。余次元２以上の場合も考える価値はあると思っている。

3.2. （擬）トーリック多様体の分類. 今まで話してきたこととは少し毛色が変わるが、次の Problem を研究するための最初のステップとして、（擬）トーリック多様体の良いクラスを見つけようと言う動機も今回の研究にはある。

Problem ([Ma06])**.** 二つの（擬）トーリック多様体 M, M' が微分同相 $M \cong M'$ であることと、それらのコホモロジー環が同型 $H^*(M) \simeq H^*(M')$ であることは必要十分か？

もちろん一般の多様体に関してはこのような事は起こらない[7]。しかし（擬）トーリック多様体と言うクラスで考えれば、（言葉の定義は省略するが）次の定理を背景としてこの Problem の答えは Yes である可能性がある。

Theorem 3.1 ([Ma06])**.** 二つの（擬）トーリック多様体 $(M,\ T)$, $(M',\ T)$ が同変微分同相 $(M,\ T) \cong (M',\ T)$ であることと、それらの同変コホモロジーが $H^*(BT)(\simeq \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n])$ *algebra* として同型 $H_T^*(M) \simeq H_T^*(M')$ であることは必要十分である。

実際、最も簡単な場合である $S^2 \times \cdots \times S^2$ や Hirzebruch 曲面[8]については Problem は肯定的に解かれている（[Ma-Pa06]）。またトーラス作用による軌道空間を単体の積と仮定した時も肯定的に解かれている（[Ma-Su]）。

今回得た（擬）トーリック多様体は複素射影空間の直積の上の複素射影空間バンドルの形をとるので大変調べやすい。例えばコホモロジー環は次のような形になる。

Proposition 3.2. （擬）トーリック多様体 $M_\alpha = (\prod_{h=1}^{a}(\mathbb{C}-\{0\})^{l_h}) \times_{(\mathbb{C}^*)^a} P(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$ のコホモロジー環は、

$$H^*(M_\alpha) \simeq \mathbb{Z}[\chi_1, \cdots, \chi_a, \chi] \Big/ \left\langle \chi_1^{l_1+1}, \cdots, \chi_a^{l_a+1}, \chi^{k_2}(\chi + \alpha_1\chi_1 + \cdots + \alpha_a\chi_a)^{k_1} \right\rangle$$

---

[6] 実際４次元の擬トーリック多様体は全て分類されている。それは $\mathbb{C}P(2)$ と Hirzebruch 曲面とのいくつかの T 同変な連結和となる [Bu-Pa02]。連結和をたくさん取っていけばバンドルの構造を持ち得ないと言うことはオイラー数等をみればわかる。

[7] 例えば $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 3)$ と同じホモトピー型を持つ（このときコホモロジー環は同型）が同相でない多様体が無限コあることが高次元多様体の手術理論から知られている [Wa70]。また球面と同相だが微分同相でないエキゾチック球面（同相なのでコホモロジー環は同型）もその例 [Mil-St74]。

[8] この場合に Theorem4.1 と Problem の差を比べてみると面白い。Hirzebruch 曲面の同変微分同相型は無限コ（$\mathbb{Z}$ 分）出てくるがトーラス作用を忘れた微分同相型はちょうど二つ $S^2 \times S^2$ と $\mathbb{C}P(2)\#\overline{\mathbb{C}P(2)}$ になる。

となる。但し $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_a)$。

Problem を完全に解決するための（小さな）一歩として今回出てきた多様体の微分同相類を、α の言葉で書いておくことは、今後の研究の上で何らかの役に立つのではないかと思っている[9]。

REFERENCES

[Br72] G. E. Bredon: Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972.

[Bu-Pa02] V. M. Buchstaber, T. E. Panov: Torus actions and their applications in topology and combinatorics, Amer. Math. Soc., 2002.

[Da-Ja91] M. Davis, T. Januszkiewicz: *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus action*, Duke. Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

[De70] M. Demazure: *Sous-groups algebriques de rang maximum du group de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3(1970), 507–588.

[Gu-Ho-Za06] V. Guillemin, T. S. Holm, C. Zara: *A GKM description of the equivariant cohomology ring of a homogeneous space*, J. Algebraic Combin., 23 (2006), no. 1, 21–41.

[Ha-Ma03] A. Hattori, M. Masuda: *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.

[Hs-Hs65] W. C. Hsiang, W. Y. Hsiang: *Classification of differentiable actions on* S^n, R^n *and* D^n *with* S^k *as the principal orbit type*, Ann. of Math., **82** (1965), 421–433.

[K1] S. Kuroki: *Classification of compact transformation groups on complex quadrics with codimension one orbits*, preprint.

[K2] S. Kuroki: *On transformation groups which act on torus manifolds*, preprint.

[Ma06] M. Masuda: *Equivariant cohomology determines (quasi)toric manifolds*, 数理解析研究所講究録 1517 (2006), 10–13.

[Ma-Pa06] M. Masuda, T. E. Panov: *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds*, arXiv: math.AT/0607094.

[Ma-Su] M. Masuda, D. Y. Suh: *Classification of Quasi-toric manifolds and small covers over a product of simplicies*, preprint.

[Mil-St74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[Uc77] F. Uchida: *Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits*, Japan. J. Math. Vol. 3, No. 1, (1977), 141–189.

[Wa70] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds, Academic Press, London, 1970. London Mathematical Society Monographs, No. 1.

[小田 85] 小田忠雄: 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店 1985.

[川久保 87] 川久保勝夫: 変換群論, 岩波書店 1987.

[戸田-三村] 戸田宏, 三村護: リー群の位相（上, 下）, 紀伊国屋書店 1978, 1979.

[枡田 06] 枡田幹也: トーリックトポロジー, 2006 年度秋季総合分科会 トポロジー分科会講演アブストラクト, 33–43.

OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE (OCAMI), SUMIYOSI-KU, OSAKA 558-8585, JAPAN

E-mail address: kuroki@sci.osaka-cu.ac.jp

[9]講演まで間に合ったら発表します。