余次元一の軌道を持つ群作用について

黒木慎太郎*†
Dep. of Mathematical Sciences, KAIST

2010 年 8 月 12 日

1 はじめに

位相変換群論とは多様体上の対称性 (群作用) を位相幾何的な視点から研究する分野である。中でも G/H の形で書かれる等質空間と呼ばれる空間はもっとも高い対称性を有する空間として昔から (現在も) 盛んに研究が行われている ([30] 等を参照)。余次元 1 の軌道を持つ多様体は、等質空間の次に対称性の高いクラスと思うことができる。対称性の高さより豊富な構造を持つだけでなく、一般的な群作用を持つ場合に比べ自明でない例を簡単に構成することができるので、トポロジーのみならず幾何学全般で研究がなされている。

本稿では、多様体上の群作用が余次元 1 の軌道を持つ場合に、同変同相類でどのように分類するかということに話題を絞って紹介する。変換群論の基本的な事実については参考文献 [5, 17, 18] 等を参照されたい。

2 基本用語

まず初めに、変換群を考える上で基本となる記号と言葉を導入しよう (この章は基本用語の説明なので読み飛ばしてもらっても構わない)。

M を n 次元多様体*1、G をコンパクトで連結なリー群とする。可微分写像 $\varphi : G \times M \to M$ が二つの関係式:

$$(1)\ \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x);\ (2)\ \varphi(e, x) = x$$

を満たす時、G は M に**作用**する、または M は **G-作用を持つ**という。ここで $x \in M$, $g, h \in G$, e は G の単位元。G-作用をもつ M を (M, G) または作用込みで (M, G, φ) と書き、M を **G-多様体**と呼ぶ。

G-多様体の同値関係は次のようにして与えられる。(M, G, φ) と (M', G', φ') が**弱 (G-) 同変同相**であるとは、微分同相写像 $f : M \to M'$ と同型写像 $\psi : G \to G'$ が存在し、$f(\varphi(g, x)) = \varphi'(\psi(g), f(x))$ を満たす時を言う。もしも、ψ が identity map であるなら、(M, G) と (M', G) は **(G-) 同変同相**であると言い、$M \overset{G}{\cong} M'$ と書く。

点 x を G-作用で動かした M の部分集合 $\{\varphi(g, x) \mid g \in G\}$ を x を通る**軌道**と言い、$G(x)$ と書く。2 点 $x, y \in M$ に対して、それらの軌道は必ず、$G(x) = G(y)$ か $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ を満たしている。よって、M 上の各元の間に軌道が同一になるかどうかで同値関係を入れる事が出来る。M をこの同値関係で割った空間、すなわち軌道全体を集

* kuroki@kaist.ac.kr; http://mathsci.kaist.ac.kr/∼31871/index.html
† The author was supported in part by Basic Science Research Program through the NRF of Korea funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0001651) and the Fujyukai Foundation.
*1 特に断らない限り、多様体は C^∞ で連結な境界を持たないものと仮定する。

めた空間を、**軌道空間**と言い、M/G と書く。M から M/G への全射を次のように書く:

$$
\begin{array}{cccc}
\pi: & M & \longrightarrow & M/G \\
 & \Psi & & \Psi \\
 & x & \longrightarrow & [x]
\end{array} \tag{2.1}
$$

ここで $[x]$ は軌道 $G(x)$ を表す。

点 x を動かさない G の部分集合 $\{g \in G \mid \varphi(g,x) = x\}$ を x の**アイソトロピー部分群**と言い、G_x と表記する。G がコンパクトなので、x を通る軌道 $G(x)$ はアイソトロピー部分群によって次のように書ける:

$$
G(x) \overset{G}{\cong} G/G_x. \tag{2.2}
$$

もしも全てのアイソトロピー部分群が単位群、つまり $G_x = \{e\}$、ならば G は M に**自由**に作用していると言う。また、$\cap_{x\in M} G_x = \{e\}$ の場合[*2]、G は M に**効果的に作用する**、または G-作用は**効果的である**と言う。

更に G_x の共役類全体に対して、G の部分群として包含関係を用いて順序を入れることができる。この順序によって最小になる共役類 (G_x) の x の軌道を**主軌道**と呼ぶ。このとき、主軌道は最大次元の軌道になることが分かる。主軌道よりも次元の低い軌道を**特異軌道**と呼ぶ。それ以外の軌道、つまり最大次元だが主軌道ではない軌道、を**例外軌道**と呼ぶ (主軌道は例外軌道の有限被覆になる)。

二つの G-多様体 (M,G) と (N,G) から、新しい G-多様体 $(M\times N, G)$ が直積への対角作用によって定義できる。$(M\times N, G)$ の軌道空間を $M\times_G N$ と書く。もしも、G が M または N に自由に作用しているならば、$M\times_G N$ は多様体になる。特に、K-多様体 (N,K) に対して、次の形の G-多様体は今後頻繁に現れる:

$$
G \times_K N,
$$

ここで、K は G の閉部分群で G に右から (逆元の掛け算によって) 作用している。よって K-多様体とみなした (G,K) が自由な作用になり、$G\times_K N$ は多様体になる。また、$G\times_K N$ 上の G-作用は、$G\times N$ の G-因子への左からの (掛け算による)G-作用によって誘導される。更に、$G\times_K N$ は G/K 上の N をファイバーとする、ファイバー束の構造があることも分かる。

次の**可微分スライス定理**(または**スライス定理**) は、コンパクト群の可微分作用を研究する上で基本的かつ非常に強力な定理である。

Theorem 2.1. 任意の $x\in M$ の軌道 $G(x)\cong G/K$ に対して、G-不変な *(*G-が作用している*)* 閉近傍 X が存在し、X は次の境界付き多様体と G-同変同相になる*:*

$$
X \cong G\times_K D_x,
$$

但し閉円盤 D_x*(*次元は $\dim M - \dim G(x) = k_x$*)* 上への K-作用は、直行群への線形表現 $\sigma : K \to O(D_x) \simeq O(k_x)$ を通して作用している。

Theorem 2.1 にある表現 σ を x の**スライス表現**と呼ぶ。また、閉近傍 X を $G(x)$ の **(閉) 管状近傍**と呼ぶ。**開管状近傍**と言う場合は X の内点集合 $\mathrm{int}(X)$ を考える。

3 (M,G) が余次元 1 の軌道を持つ場合の位相型

n 次元多様体 M の部分多様体 N が $n - \dim N = k$ を満たす時、N を**余次元 k の部分多様体**と言う。本章では余次元 1 の軌道を持つ G-多様体の構造について紹介する。

[*2] この条件は次のように言いかえることもできる。『$\Phi(g) = \varphi(g,\cdot)$ で与えられた表現 $\Phi: G\to \mathrm{Diff}(M)$ が単射になる場合。』

3.1　(M, G) が余次元 0 の軌道を持つ場合

本章の主題に入る前に、n 次元多様体 M 上の G-作用が余次元 0 の軌道を持つ場合について考えてみよう。つまり、次のような $x \in M$ が存在すると仮定する:

$$\dim G(x) = n.$$

G がコンパクトと仮定しているので、M もコンパクトとなり、$M = G(x)$ になることが分かる[*3]。(2.2) よりある閉部分群 H が存在して $M \overset{G}{\cong} G/H$ となることが言える (このような M の事を **(G の) 等質空間**と言い、G が M に**推移的に作用する**と言う)。つまり、コンパクトな多様体 M 上の余次元 0 の G-作用 (M, G) を同変同相類によって分類する問題は、『G の部分群を分類する問題』と言いかえることができる。そのような問題は、古典的に確立しているリー群論の結果を用いることによって解くことができる ([30] 等を参照)。

実際に、変換群論の道具が必要になるのは余次元 1 の軌道を持つ場合からである[*4]。3.2 章から、余次元 1 の軌道を持つ多様体の構造を考えていこう。

3.2　(M, G) が余次元 1 の軌道を持つ場合：その１ ($Q \neq [0, 1]$ の場合)

n 次元多様体 M 上の G-作用が余次元 1 の軌道を持つ場合を考える。すなわち、次のような $x \in M$ が存在する場合を考える:

$$\dim G(x) = n - 1.$$

このような M 上の G-作用の事を**余次元 1 の軌道を持って働く作用**もしくは**余等質性 1 の作用を持つ**と言う。また、G がコンパクトであるので、主軌道の次元が余次元 1、つまり $n - 1$、になることも分かる。

同変同相型を調べるために、まずは軌道空間に着目してみよう。余次元 1 の軌道を持つ場合、軌道空間 $Q = M/G$ は常に 1 次元の (境界付きの) 多様体になる事が分かる。すなわち Q は次のいずれかになる:

$$(1)\ Q = \mathbb{R}, \text{直線}; \ (2)\ Q = \mathbb{R}^+, \text{半直線}; \ (3)\ Q = S^1, \text{円周}; \ (4)\ Q = [0, 1], \text{区間}.$$

3.2 章では、最初の 3 つの場合 ($Q = \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+,\ S^1$) について M の G-同変同相型がどのようになるのか考えてみる。

3.2.1　$Q = \mathbb{R}$ の場合

『スライス表現は主軌道の管状近傍において常に自明になる』と言う事実を用いると、軌道空間の内点を (2.1) の π によって引き戻すと、主軌道になると言うことが分かる。

この事実とスライス定理を用いて $Q = \mathbb{R}$ の場合は具体的に、ある閉部分群 $K \subset G$ が存在して、次のような直積の形で書けることがわかる:

$$M \overset{G}{\cong} G/K \times \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

ここで、G は G/K-因子に左から作用し、$\mathbb{R}$ に自明に作用する。このとき、軌道は G/K の形のみになることがわかる。

[*3] 一般に、G が非コンパクト群になる場合、この事実は成立しない ([39] 等を参照)。G が代数群で余次元 0 の軌道を持つ場合、代数幾何においては、*toric variety* やもっと一般的に *spherical variety* と言う性質のいいクラスが考えられている ([6] 等を参照)。

[*4] この点から、変換群論はリー群論の一般化と思うこともできる。

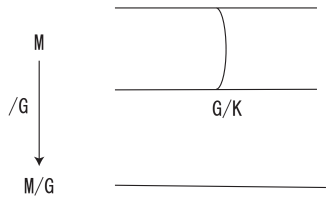

図 1　$Q = \mathbb{R}$ のイメージ.

以上より、$Q = \mathbb{R}$ の場合は、3.1 章の余次元 0 の軌道を持つ場合を考えることと本質的に変わらない。

3.2.2　$Q = \mathbb{R}^+$ の場合

次に、スライス表現が非自明の場合、つまり $G(x) \cong G/K$ が特異軌道か例外軌道になる場合を考えてみる。この場合、$G(x)$ の管状近傍 $X \cong G \times_K D$ 上の点 $y \in X$ を $[g, z] \in G \times_K D$ と (スライス定理の同型を用いて) 同一視すると、次の二つが成立する。

- z が D の原点 $o \in D$ ならば、y の軌道は G/K そのものになる:
- $z \in D$ が原点でなければ、y の軌道は主軌道 G/H になる (但し、$H \subset K$)。

この事実と 3.2.1 章で述べた事実を用いると、$Q = \mathbb{R}^+$ の場合は具体的に、ある閉部分群 $K \subset G$ が存在して、次のような G/K 上のベクトル束の形で書ける事がわかる:

$$M \overset{G}{\cong} G \times_K V, \tag{3.2}$$

ここで、$V \overset{K}{\cong} \mathbb{R}^\ell$ は K の線形表現空間で、その軌道空間が $\mathbb{R}^+$ になるものである。いいかえると、V 上の K-作用の主軌道として、$K/H \overset{K}{\cong} S^{\ell-1} \subset V$ が現れるものになる。但し、$S^{\ell-1}$ は $(\ell - 1)$ 次元球面で $\ell = n - \dim G/K \geq 1$ を満たす。このとき、G/K は特異軌道 ($\ell > 1$ の場合) か例外軌道 ($\ell = 1$ の場合) になり、G/H は主軌道になる。

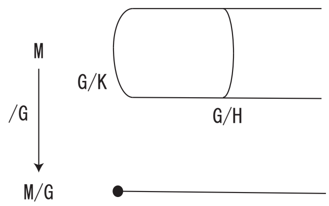

図 2　$Q = \mathbb{R}^+$ のイメージ.

以上より、$Q = \mathbb{R}^+$ の場合は、G の部分群の対 $H \subset K$ で $K/H \cong S^{\ell-1} (\ell = n - \dim G - \dim K)$ なるものを見つけることに帰着される。一般の次元の球面に推移的に (線形に) 作用するコンパクトリー群の分類は、1950 年代までに Borel[4], Montgomery-Samelson[31], Poncet[35] によってなされているので ([16] も参照)、この場合はそれらを用いることで分類がなされる。

3.2.3　$Q = S^1$ の場合

次に $Q = S^1$ の場合について考えてみる。この場合は、3.2.1 章で述べた事実を用いれば、全ての軌道が主軌道 G/K になることがすぐに分かる。更に、S^1 は二つの 1 次元開集合 U, V を張り合わせることにより作ることが

できたので、それらの開集合に対して $\pi^{-1}(U) \cong G/K \times U$, $\pi^{-1}(V) \cong G/K \times V$ となることも分かる。よって $Q = S^1$ の場合は、ファイバーが主軌道 G/K となる S^1 上のファイバー束になる。つまり、(2.1) の π に対して、次のファイブレーションが存在する:

$$G/K \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1. \tag{3.3}$$

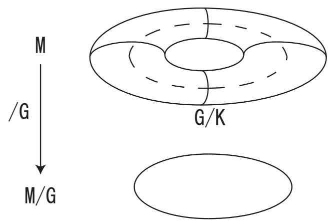

図 3　$Q = S^1$ のイメージ.

ファイバー束 (3.3) の構造群を調べるために、M 上の G-作用を軌道空間から構成する事を考えてみよう。つまり、$M = \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V)$ 全体に $\pi^{-1}(U)$ と $\pi^{-1}(V)$ の G-作用が拡張するのはいつかを考えてみる。そのような拡張が存在するためには、$U \cap V$ 上のファイバー G/K の張り合わせ写像 $\tau : G/K \to G/K$ が G-同変でなければならないことが分かる。また、そのような τ は、次の群の元とみなせることが知られている:

$$\tau \in N_G(K)/K, \tag{3.4}$$

但し、$N_G(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$ は K の正規化群。ここで、G-同変同相写像 $\tau : G/K \to G/K (\in N_G(K)/K)$ は G/K への右からの掛け算と見ることで定義できる。

以上より、$Q = S^1$ の場合は、S^1 上の構造群が $N_G(K)/K$ となる G/K-束の分類に帰着される。よって古典的に確立されたファイバー束の分類に関する結果が使える ([30, 36] 等を参照。より詳しくは [1] も参照)。

3.3　(M, G) が余次元 1 の軌道を持つ場合：その 2 ($Q = [0, 1]$ の場合)

$Q = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, S^1 の場合は推移的な作用の分類や S^1 上の特殊なバンドルの分類に帰着できたが、$Q = [0, 1]$ の場合はそのような場合に帰着することはできない。よって、この場合が余次元 1 の軌道を持つ群作用の中では本質的な場合であると同時に、最も複雑な場合である。しかしながら、$Q = [0, 1]$ の場合は、面白く具体的な例を豊富に提供してくれるので、古くから現在までトポロジーのみならずさまざまな分野の人たちによって研究されている ([1, 3, 5, 11, 13, 19, 20, 21, 23, 24, 34, 37, 40] 等がある)。3.3 章では、球面上の余次元 1 の作用を調べた Wang[40] の結果を改良した Uchida[37] の分類方法 (ここでは **Wang-Uchida の方法**と呼ぶ) を、具体的な多様体のクラス (Hattori-Masuda のトーラス多様体 [15, 26]) を例に紹介しよう。

3.3.1　$Q = [0, 1]$ の場合

まず初めに、$Q = [0, 1]$ の時の一般的な構造を簡単に見てみよう。

$Q = [0, 1]$ の場合は、$Q = \mathbb{R}^+$ の場合を二つ張り合わせた形になる。つまり、$\pi^{-1}(0)$ と $\pi^{-1}(1)$ に現れる軌道が特異軌道か例外軌道になり、他が主軌道になることが分かる。主軌道を G/K、それ以外の軌道を G/K_1, G/K_2 と書き、G/K_i の管状近傍を X_i と書こう ($i = 1, 2$)。スライス定理から $X_i \cong G \times_{K_i} D^{k_i}$ が分かり、図 4 のようなイメージになる。

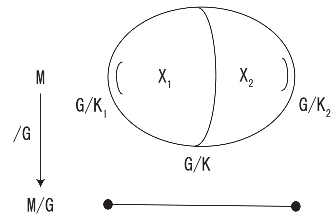

図 4　$Q=[0,1]$ のイメージ.

3.3.2　トーラス多様体

次に、Hattori-Masuda[15] によって定義された、トーラス多様体と呼ばれる多様体のクラスを導入しよう ([26] も参照)。そして、何故このクラスが $Q=[0,1]$ の場合と関係するのかを考えてみる。

(M,T) を $2n$ 次元の向きつけられたコンパクト連結多様体 M 上の n 次元のトーラス T-作用[*5]とする。$(M,\ T)$ が次の二つの条件を満たす時に**トーラス多様体**と言う[*6]:

(1) T の作用は効果的かつ滑らかである; (2) T 作用による不動点集合 M^T が空ではない.

ここで、**不動点集合**とは $M^T=\{x\in M\mid T(x)=x\}$ なる T 作用で動かない M の点の集合の事である。定義から、M^T はいつも有限集合になる事が分かる。

次の二つ (S^{2n},T^n) と $(\mathbb{C}P(n),T^n)$ は、もっとも基本的なトーラス多様体の例である。

例 1　$2n$ 次元の球面上の点 $(z_1,\ldots,z_n,r)\in S^{2n}\subset\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{R}$ への $(t_1,\ldots,t_n)\in T^n$ 作用を次のように定義する:

$$(z_1,\ \ldots,\ z_n,r)\mapsto(t_1z_1,\ \ldots,\ t_nz_n,r).$$

このとき、不動点は北極 $(0,\ldots,0,+1)$ と南極 $(0,\ldots,0,-1)$ のちょうど 2 点。

例 2　複素 n 次元複素射影空間上の点 $[z_0:\cdots:z_n]\in\mathbb{C}P(n)=\mathbb{C}^{n+1}-\{o\}/\mathbb{C}^*$ への $(t_1,\ldots,t_n)\in T^n$ 作用を次のように定義する:

$$[z_0:z_1:\cdots:z_n]\mapsto[z_0:t_1z_1:\cdots:t_nz_n].$$

このとき、軌道空間は n 次元単体とみなすことができ、その頂点が不動点に対応する。つまり $n+1$ 個の不動点を持つ。

上の二つの T^n 作用はそれぞれ、$\mathbb{C}^n$ 上の $U(n)$ 作用 (または $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ とみなした時の $SO(2n)$ 作用) と $\mathbb{C}^{n+1}$ 上への $PU(n+1)$ 作用から誘導されていることに注意する。ここで $PU(n+1)=SU(n+1)/C$(但し、C は $SU(n+1)$ の中心)。また、これらの作用はそれぞれ、余次元 1 の軌道を持つ作用、推移的な作用になることも注意しておこう。よって次の問題が自然に考えられる:

[*5] n 次元のトーラスとは円周群 S^1 の n 個の直積の事、つまり n 次元のコンパクトな可換リー群のことである。

[*6] 本来の [15, 26] の定義では、単に多様体が向きつけ可能と言うだけでなく、『余次元 2 の部分トーラス多様体上の向き』を一つ決めてトーラス多様体と呼ぶ (このように部分多様体の向きも定めたものを **omniorientation** と呼ぶ)。Omniorientation の取り方は M 上の T-不変な stable almost complex structure の取り方に関係してくる。本稿ではトーラス多様体上への可微分な作用 (omniorientation を保存するとは限らない作用) に興味があるので omniorientaion は仮定していない。

Problem 1. (M, T, φ) をトーラス多様体、G を T を極大トーラスとして持つ非可換なコンパクトリー群とする。トーラス多様体上の T-作用が G-作用 $(M, G, \widetilde{\varphi})$ へ拡張するとする。つまり $\widetilde{\varphi}|_{T\times M} = \varphi$ を満たすような G-作用が存在するとする。もしも G-作用が余次元 1 の軌道を持つ場合は M はどのような G-多様体になるか?

3.3.3 Wang-Uchida の方法

Problem 1 のように仮定すると、トーラス多様体の定義から $M/G = [0, 1]$ であることが分かる。Problem 1 を Wang-Uchida の方法で解いてみよう。ここでは簡単のために M を単連結でかつ G/K_1 と G/K_2 が部分トーラス多様体であると仮定し (3.3.1 章を参照)、証明のアウトラインのみ紹介する (詳しくは [23] を参照)。

STEP 1. Wang-Uchida の方法に従うと、最初に G/K_1 と G/K_2 を求めることになる。M は単連結なトーラス多様体であることから、G/K_1 と G/K_2 も単連結なトーラス多様体、つまり K_1 と K_2 も T を極大トーラスとして持つような等質空間 (このような空間を**同一階数の等質空間**と呼ぶ) になることが分かる。トーラス多様体が等質空間になるときを分類した [22] から、次の結果がわかる*7:

Lemma 3.1. 上のように仮定すると、G と $K_i (i = 1, 2)$ は次のものしかない:

$$G \approx \prod_{j=1}^{a} PU(\ell_j + 1) \times \prod_{h=1}^{b} SO(2m_h + 1) \times G'_i,\ K_i \approx \prod_{j=1}^{a} P(U(\ell_j) \times U(1)) \times \prod_{h=1}^{b} SO(2m_h) \times G'_i.$$

但し、$\approx$ でリー環が同型と言う意味。つまり $G/K_i \cong \prod_{j=1}^{a} \mathbb{C}P(\ell_j) \times \prod_{h=1}^{b} S^{2m_h}$.

STEP 2. 次は管状近傍 $X_i \cong G \times_{K_i} D^{k_i}$ のスライス表現 $\sigma_i (i = 1, 2)$ の計算になる。まず始めに、Lemma 3.1 にある G'_i が、G の極大トーラスの次元が n であることと (G, K_1) と (G, K_2) を見比べることによって、具体的に求めることができる。よって、3.2.2 章 ($Q = \mathbb{R}^+$ の場合) の方法で、X_i のスライス表現 σ_i とともに主軌道のアイソトロピー部分群 K の二つの包含写像 $\iota_i : K \to K_i$ を出すことができる。

STEP 3. 次に、3.3.1 章で述べた $Q = [0, 1]$ の場合の構造から、X_1 と X_2 の境界を張り合わせて G-多様体を具体的に構成する。よって、張り合わせ写像を考察する必要がある。X_i の形から $\partial X_i \cong G/K$ が分かるので張り合わせ写像は $\tau : G/K \overset{\cong}{\to} G/K$ となる。このとき、3.2.3 章 ($Q = S^1$ の場合) と同様に $\tau \in N_G(K)/K$ も分かる。よって $N_G(K)/K$ を計算すれば張り合わせ写像がどのくらいあるかが分かる。

STEP 4. STEP 2 で対 (X_1, X_2) が分類された。STEP 3 でそれらの張り合わせ写像 τ が分類された。X_1, X_2 を τ で張り合わせてできた多様体を $X_1 \cup_\tau X_2$ と書こう。STEP 4 では、二つの張り合わせ写像で作った多様体が、いつ同変同相になるかを考察する必要がある。次の補題を使うことで、τ を更に制限できる ([37] 等を参照)。

Lemma 3.2 (Uchida's criterion)**.** $X_1 \cup_\tau X_2$ と $X_1 \cup_{\tau'} X_2$ は以下のいずれかを満たせば同変同相:

(1) τ と τ' は *G-diffeotopic;* (2) $\tau^{-1}\tau'$ か $\tau'\tau^{-1}$ が X_i 上の同変同相写像へ拡張する.

最後に、STEP 4 までに出てきた G-多様体を具体的に構成し、それらを見比べることで、次の定理が導ける。

Theorem 3.3 ([23])**.** トーラス多様体 (M, T) が余次元 1 の軌道を持つ (M, G) へ (上述した仮定の下で) 拡張するとすると次の G-多様体と同変同相になる:

$$\left(\prod_{h=1}^{b} S^{2m_h} \times N, \quad \prod_{h=1}^{b} SO(2m_h + 1) \times H\right),$$

*7 [2] では toric variety が代数的に推移的な作用を持つ場合が分類されている。

ここで $(N,\ H)$ は次のいずれかを満たす:

N	H
$\left(\prod_{j=1}^{a} S^{2\ell_j+1}\right) \times_{T^a} S(\mathbb{C}_\rho^k \oplus \mathbb{R})$	$\prod_{j=1}^{a} PU(\ell_j+1) \times U(k)$
$\left(\prod_{j=1}^{a} S^{2\ell_j+1}\right) \times_{T^a} P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$	$\prod_{j=1}^{a} PU(\ell_j+1) \times P(U(k_1) \times U(k_2))$
$\prod_{j=1}^{a} \mathbb{C}P(\ell_j) \times S(\mathbb{R}^{2k} \oplus \mathbb{R})$	$\prod_{j=1}^{a} PU(\ell_j+1) \times SO(2k)$

ここで、$P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$ は $\dim_{\mathbb{C}} = k_1 + k_2 - 1$ の複素射影空間、$S(V \oplus W) \subset V \oplus W$ は単位球面。

Theorem 3.3 の上から二つの N を説明しよう。N は、直積 $T^a = \prod_{j=1}^{a} S^1$ を球面の直積 $\prod_{j=1}^{a} S^{2\ell_j+1}$ 上に因子ごとに作用させ、ファイバー方向へは $\rho : T^a \to S^1$ なる表現で $\mathbb{C}_\rho^k \simeq \mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}_\rho^{k_1} \simeq \mathbb{C}^{k_1}$ 上にスカラー倍で作用させた直積空間を割ったもの。つまり、N は複素射影空間の直積 $\prod_{j=1}^{a} \mathbb{C}P(\ell_j)$ 上の複素射影バンドルもしくは球面バンドルと思うことができる。

より一般の場合 (向きつけを仮定しないトーラス多様体の場合) については [24] を参照。また、余次元 1 の軌道を持つ群作用の分類には、上述の Wang-Uchida の方法以外に、Alekseevskii-Alekseevskii の方法 [1] もある。

4 エピローグ

Theorem 3.3 から派生する研究や問題をいくつか述べて本稿を終わりにしよう。

4.1 何故、余次元 1 の場合を分類するのか?

Theorem 3.3 でみたように、余次元 1 の場合はそれほど自明とは思えないような例を含む形で、明確な形に分類できることが多い。そこで、余次元 1 の軌道を持つ多様体を分類することの意義の一つは、「未解決問題に対する試験場を提供すること」と言える。例えば、次の問題は [29] で提出され、まだ未解決である。

Problem 2 (cohomological rigidity problem)**.** 二つのトーリック多様体のコホモロジー環が同型ならばそれらは同相であろうか?

トーリック多様体 (定義は [9] 等を参照) は、トーラス多様体の中でもとても性質のいいクラスである。[29] では上の問題をもっと一般化した『T-作用の軌道空間がホモトピーセルであるようなトーラス多様体』の場合についても提出しているが、Theorem 3.3 で分類した結果を同変同相ではなく、G-作用を考えない、同相型で分類すると、この場合に対して否定的な答えを与えることができる ([7] を参照)。

4.2 余次元 k の場合について

一般の余次元 k の軌道を持つ場合は、古くは [16] で考えられ、$k = 2$ の場合は [32, 33, 38] 等で考察されている。しかしながら $k \geq 2$ の場合は、例えば [33] では現代的な言葉を用いれば『S^4 以外の単連結な 4 次元トーラス多様体は基本的なトーラス多様体 ($\mathbb{C}P(2)$ と Hirzebruch 曲面) からの同変連結和で書ける』と言うような結論となり、$k = 1$ の時のような明確な形での分類はほとんど不可能になる。よって、このような場合は変換群論の不変量 (同変コホモロジー等) を計算し、それを用いて分類できないか考えることとなる。4.2 章では最近の発展の様子を、余次元 k の主軌道をもつ場合の視点から簡単に述べてみたい。

4.2.1 軌道空間から構成した G-多様体を研究する

軌道空間の次元が k なら余次元 k の主軌道を持つことに注意しよう。そこで最近は、3.2.3 章や 3.3 章で議論したような、軌道空間 (に群作用の情報を付加した物) から G-多様体を構成し、それを研究すると言う方法が注目されている ([1, 8, 9, 13, 14, 42] 等を参照*8)。

特にトーリック幾何を動機とした Davis-Januszkiewicz[9] の研究により、位相的に定義したトーリック多様体と軌道空間の組み合わせ構造との間に綺麗な対応がつくことが示され、現在ではトーリックトポロジーと呼ばれる分野となり関連した研究が盛んに行われている。中でも同変同相型の分類に関しては、『[9] で構成された G-多様体は同変コホモロジーを用いて完全に分類できる』事が分かっている (Masuda の定理 [27]。[25] も参照)。

4.2.2 トーラス作用の拡張作用について

Theorem 3.3 や [22, 23, 24] の『トーラス多様体の T-作用の G-作用への拡張の研究』は代数幾何の Demazure の研究 [10] のトポロジー版だと思うことができる*9。一般に拡張作用の主軌道は、余次元 1 のみならず余次元 $k(\geq 2)$ の場合が現れる。最近では、トポロジーの立場から Masuda[28] がトーラス多様体のルート系と言う不変量を*10、Wiemeler[41] が admissible 5-tuple と言う不変量を導入して、拡張作用を分類することが試みられている。それらの研究によると、トーラス多様体上の拡張作用は Theorem 3.3 で出てきたような SU, SO 型 (A, B, D 型) のものに限られることが分かる (toric variety の場合は A 型のみに注意)。

トーラス多様体よりもさらに広大なトーラス作用を持つクラスとして GKM 多様体と言うものがある ([12] 等を参照)。GKM 多様体には同一階数の等質空間 G/H が全て含まれるので、この場合の拡張作用を考えれば A〜G 全ての型が現れると容易に想像できる。GKM 多様体上の拡張作用を研究することは今後の課題の一つである。

参考文献

[1] A.V. Alekseevskii, D.V. Alekseevskii, *G-manifolds with one-dimensional orbit space*, Adv. in Soviet Math., **8** (1992), 1–31.

[2] I.V. Arzhantsev, S.A. Gaifullin, *Homogeneous toric varieties*, J. Lie Theory, **20** (2010), 283-293.

[3] T. Asoh, *Compact transformation groups on Z_2-cohomology spheres with orbits of codimension* 1, Hirosima Math. J., **11** (1981), 571–616.

[4] A. Borel, *Le plan projectif de actaves et les spheres comme espaces homogenes*, C.R. Acad. Sci., Paris, **230** (1950), 1378-1381.

[5] G.E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972.

[6] M. Brion, *Spherical varieties*, the lecture note written by R. Devyatov, D. Fratila, V. Tsanov, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼mbrion/SphericalVar.pdf, (2009).

[7] S. Choi, S. Kuroki, *Topological classification of torus manifolds which have codimension one extended actions*, arXiv:0906.1335; OCAMI preprint series 09-9, (2009).

[8] M. Davis, *Smooth G-manifolds as collections of fiber bundles*, Pacific J. of Math., **77** (1978), 315–363.

[9] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus action*, Duke. Math. J., **62** (1991), 417–45.

*8 [42] ではより一般に局所的にトーラス作用を持つような空間の構成方法が示されている。

*9 Demazure は、toric variety の autmorphism group を調べている。Autmorphism group は代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用の拡張作用であると考えることができる。

*10 [28] では symplectic toric についてのみルート系を定義しているが、2010 年 5 月の Fudan University での Masuda の講演ではより一般にトーラス多様体上のルート系が定義されていた。

[10] M. Demazure, *Sous-groups algebriques de rang maximum du group de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **3**(1970), 507–588.

[11] A. Gambioli, *Eight-dimensional $SU(3)$-manifolds of cohomogeneity one*, Ann. Global Anal. Geom., **34** (2008), 77–100.

[12] V. Guillemin, C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J., **107** (2001), 283–349.

[13] I. Hambleton, J-C. Hausmann, *Equivariant principal bundles over spheres and cohomogeneity one manifolds*, Proc. London Math. Soc., **86** (2003), 250–272.

[14] I. Hambleton, J-C. Hausmann, *Equivariant bundles and isotropy representations*, Groups, Geom. and Dynamics, **4** (2010), 127-162

[15] A. Hattori, M. Masuda, *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.

[16] W.C. Hsiang, W.Y. Hsiang, *Classification of differentiable actions on S^n, R^n and D^n with S^k as the principal orbit type*, Ann. of Math., **82** (1965), 421–433.

[17] W.Y. Hsiang, Cohomology Theory of Topological Transformation Groups, Ergeb. Math., 85, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[18] K. Kawakubo, The theory of transformation groups, Oxford Univ. Press, London, 1991.

[19] A. Kollross, *A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 571–612.

[20] S. Kuroki, *On 8-manifolds with $SU(3)$-actions*, RIMS Kokyuroku, **1569** (2007), 81–93.

[21] S. Kuroki, *Classification of compact transformation groups on complex quadrics with codimension one orbits*, Osaka J. Math., **46** (2009), 21–85.

[22] S. Kuroki, *Characterization of homogeneous torus manifolds*, Osaka J. Math., **47** (2010), 285–299.

[23] S. Kuroki, *Classification of quasitoric manifolds with codimension one extended actions*, OCAMI preprint series 09-4, (2009).

[24] S. Kuroki, *Classification of torus manifolds with codimension one extended actions*, OCAMI preprint series 09-5, (2009).

[25] S. Kuroki, *Equivariant cohomological rigidity of toric hyperKähler manifolds*, preprint (2010).

[26] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J., **51** (1999), 237–265.

[27] M. Masuda, *Equivariant cohomology distinguishes toric manifolds*, Adv. Math., **218** (2008), 2005–2012.

[28] M. Masuda, *Symmetry of a symplectic toric manifold*, to appear in J. Symp. Geom.; arXiv:0906.4479 (2009).

[29] M. Masuda, D.Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math., **460** (2008), 273-286.

[30] M. Mimura, H. Toda, Topology of Lie Groups, I and II, Amer. Math. Soc., 1991.

[31] D. Montogomery, H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math., **44** (1943), 454–470.

[32] A. Nakanishi, *$SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$-homology spheres with codimension two principal orbits*, Tokyo J. Math., **7** (1984), 287–313.

[33] P. Orlik, F. Raymond, *Actions of the torus on 4-manifolds. I*, Trans. Amer. Math. Soc., **152** (1970), 531–559.

[34] F. Podesta, L. Verdiani, *Positive curved 7-dimensional manifolds*, Quart. J. Math., Oxford, **50** (1999), 497–504.

[35] J. Poncet, *Groupes de Lie compacts de transformations de lespace euclidien et les spheres comme espaces homogenes*, Comment. Math. Helv., **33** (1959), 109-120.

[36] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1951.

[37] F. Uchida, *Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits*, Japan. J. Math., **3** (1977), 141–189.

[38] F. Uchida, *Compact transformation groups on complex projective spaces with codimension two principal orbits*, Osaka J. Math., **15** (1978), 137–150.

[39] F. Uchida: *Classification of real analytic $SL(n, \boldsymbol{R})$ actions on n-sphere*, Osaka J. Math., **16** (1979), 561-579.

[40] H.C. Wang, *Compact transformation groups of S^n with an $(n-1)$-dimensional orbit*, Amer. J. Math., **82** (1960), 698–748.

[41] M. Wiemeler, *Torus manifolds with non-abelian symmetries*, arXiv:0911.4936 (2009).

[42] T. Yoshida, *Local torus actions modeled on the standard representation*, arXiv:0710.2166 (2007).