대학원 기초시험 [선형대수학]

KAIST 수리과학과

2011 년 1 월 20 일

1. 시험 과목: 선형대수학, 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II, 전공심화 III
2. 시험 과목 범위: 기출문제와 해당과목 강의내용이 시험범위를 규정한다.
   - 선형대수학: 선형대수학개론 (MAS109), 선형대수학 (MAS212)
   - 해석학: 해석학 I (MAS241), 해석학 II (MAS242)
   - 전공심화 I: 현대대수학 I (MAS311), 현대대수학 II (MAS312), 위상수학 (MAS331), 미분기하학개론 (MAS321)
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 (MAS341), 르베그적분론 (MAS441)
   - 전공심화 III: 수리통계학 (MAS355)
3. 시험 문항수와 시간
   - 선형대수학: 선형대수학 6 문제, 90 분
   - 해석학: 해석학 6 문제, 90 분
   - 전공심화 I: 현대대수학 4 문제, 위상수학과 미분기하학 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 4 문제, 르베그적분론 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 III: 수리통계학 6 문제, 90 분
4. 2012 년도부터 입학하는 석사과정 학생들은 선형대수학과 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II 시험을 보아야 한다. 단, 학부에서 수학을 전공하지 않은 학생은 전공심화 I 또는 전공심화 II를 전공심화 III으로 대체할 수 있다.
5. 전공심화 I과 II에서는 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시한다.
6. 시험 시간표와 과목
   - 10:00–11:30 : 선형대수학
   - 12:30–14:00 : 해석학
   - 14:30–16:00 : 전공심화 I
   - 16:30–18:00 : 전공심화 II

1. Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Find bases for the row space $\mathbf{row}(A)$ and the null space $\mathbf{null}(A)$ of A.
   (b) Find an orthonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

2. Let
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Is A diagonalizable? Justify your answer.
   (b) Find the Jordan form of A.

3. Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ and $\langle , \rangle$ an inner product on V. Show that, if $v_1, \cdots, v_n$ are nonzero orthogonal vectors in V with respect to $\langle , \rangle$, then $v_1, \cdots, v_n$ are linearly independent.

4. Let
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
   Let $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ and $B_2 = \{v_1, v_2\}$ be ordered bases for $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^2$, respectively. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ and $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be the linear transformation defined by
$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \text{ for the column vectors } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$
   Find the matrix representation $[T]_{B_2,B_1}$ of T relative to the pair of ordered bases B_1 and B_2.

5. Suppose that $A = A^H$, where H means the conjugate transpose.
   (a) Prove that every eigenvalue of A is real.
   (b) Prove that the eigenvectors of A of different eigenvalues are orthogonal.

6. Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Express e^{tA} as a matrix, for $t \in \mathbb{R}$.

대학원 기초시험 [해석학]

KAIST 수리과학과

2011 년 1 월 20 일

1. 시험 과목: 선형대수학, 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II, 전공심화 III
2. 시험 과목 범위: 기출문제와 해당과목 강의내용이 시험범위를 규정한다.
   - 선형대수학: 선형대수학개론 (MAS109), 선형대수학 (MAS212)
   - 해석학: 해석학 I (MAS241), 해석학 II (MAS242)
   - 전공심화 I: 현대대수학 I (MAS311), 현대대수학 II (MAS312), 위상수학 (MAS331), 미분기하학개론 (MAS321)
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 (MAS341), 르베그적분론 (MAS441)
   - 전공심화 III: 수리통계학 (MAS355)
3. 시험 문항수와 시간
   - 선형대수학: 선형대수학 6 문제, 90 분
   - 해석학: 해석학 6 문제, 90 분
   - 전공심화 I: 현대대수학 4 문제, 위상수학과 미분기하학 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 4 문제, 르베그적분론 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 III: 수리통계학 6 문제, 90 분
4. 2012 년도부터 입학하는 석사과정 학생들은 선형대수학과 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II 시험을 보아야 한다. 단, 학부에서 수학을 전공하지 않은 학생은 전공심화 I 또는 전공심화 II를 전공심화 III으로 대체할 수 있다.
5. 전공심화 I과 II에서는 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시한다.
6. 시험 시간표와 과목
   - 10:00–11:30 : 선형대수학
   - 12:30–14:00 : 해석학
   - 14:30–16:00 : 전공심화 I
   - 16:30–18:00 : 전공심화 II

1. Show that every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has a cluster point, i.e., it has a subsequence that converges to a point in $\mathbb{R}$.

2. Let f be a real-valued function on a set S in $\mathbb{R}^n$ and c be a limit point of S. Show that $\lim_{x\to c} f(x) = 2011$ if and only if, whenever $\{x_k\}$ is a sequence in $S \setminus \{c\}$ with $\lim_{k\to\infty} x_k = c$, we have $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 2011$.

3. Let f be a real-valued function on a set S in $\mathbb{R}^n$ and $\{f_k\}$ be a sequence of uniformly continuous, real-valued functions on S that converges uniformly to f on S. Show that f is uniformly continuous on S.

4. Let f be a vector-valued function on an open, convex set U in $\mathbb{R}^n$ with values in $\mathbb{R}^m$ that is of class C^1 on U. Show that $\|Df(\mathbf{c})(\mathbf{y})\| \leq 2\|\mathbf{y}\|$ for all $\mathbf{c} \in U$ and $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ if and only if $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\| \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in U$.

5. Show that a continuous, real-valued function on $R = [0,1] \times [0,1]$ is integrable on R.

6. For $(x, y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$, let $f(x,y) = x^{y-1}e^{-x}$ and $f_y(x) = f(x,y)$. Let $a > 0$. Show that $\int_1^\infty f_y$ does not converge uniformly on $[a,\infty)$ and $\int_0^\infty D_2 f(x,y)dx$ converges uniformly on $[a, 2a]$.

대학원 기초시험 [전공심화 I]

KAIST 수리과학과

2011 년 1 월 20 일

1. 시험 과목: 선형대수학, 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II, 전공심화 III
2. 시험 과목 범위: 기출문제와 해당과목 강의내용이 시험범위를 규정한다.
   - 선형대수학: 선형대수학개론 (MAS109), 선형대수학 (MAS212)
   - 해석학: 해석학 I (MAS241), 해석학 II (MAS242)
   - 전공심화 I: 현대대수학 I (MAS311), 현대대수학 II (MAS312), 위상수학 (MAS331), 미분기하학개론 (MAS321)
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 (MAS341), 르베그적분론 (MAS441)
   - 전공심화 III: 수리통계학 (MAS355)
3. 시험 문항수와 시간
   - 선형대수학: 선형대수학 6 문제, 90 분
   - 해석학: 해석학 6 문제, 90 분
   - 전공심화 I: 현대대수학 4 문제, 위상수학과 미분기하학 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 II: 복소변수함수론 4 문제, 르베그적분론 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 III: 수리통계학 6 문제, 90 분
4. 2012 년도부터 입학하는 석사과정 학생들은 선형대수학과 해석학, 전공심화 I, 전공심화 II 시험을 보아야 한다. 단, 학부에서 수학을 전공하지 않은 학생은 전공심화 I 또는 전공심화 II를 전공심화 III으로 대체할 수 있다.
5. 전공심화 I과 II에서는 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시한다.
6. 시험 시간표와 과목
   - 10:00–11:30 : 선형대수학
   - 12:30–14:00 : 해석학
   - 14:30–16:00 : 전공심화 I
   - 16:30–18:00 : 전공심화 II

다음 8 문제 중에서 6 문제에 답하시오. 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시하시오.

1. (a) How many group homomorphisms are there from the group $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ to the symmetric group on three letters S_3?

   (b) Describe all ring homomorphisms of $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ into $\mathbb{Z}$.

   (c) Show that the additive group $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ of rational numbers is not finitely generated.

2. Show that S_4 is a solvable group, i.e. it has a composition series such that all factor groups are abelian.

3. (a) Describe all groups of order 9.

   (b) Give different four examples of commutative rings of order 9 with unity up to isomorphism.

   (c) Show that there is a unique integral domain of order 9.

4. Let F be a field, and let K be the splitting field of the polynomial $x^3 - 5$ over F. Give the degree $[K : F]$ and the Galois group $G(K/F)$ respectively when F is one of the following fields, i.e. $F = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_3$.

5. Let A and B be compact subspaces of the topological spaces X and Y, respectively. If N is an open subset of the product space $X \times Y$ containing $A \times B$, prove that there exist open sets U and V in X and Y, respectively, such that

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

6. Prove that $\mathbb{R}^2 - A$ is connected if A is a countable subset of $\mathbb{R}^2$.

7. Let C be the intersection of the following two surfaces S_1 and S_2:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$S_2 : x^2 + y^2 = x.$$

   Let $p = (0, 0, 1)$. Answer the following questions:

   (a) Calculate the Frenet apparatus κ, τ, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, and $\mathbf{b}$ of C at the point p.

   (b) Calculate the normal curvature $k_n(p, S_1)$ of C at p as a curve on S_1 and the normal curvature $k_n(p, S_2)$ of C at p as a curve on S_2.

8. Answer the following questions:

   (a) Let p be an elliptic point of a regular surface S. Show that there exists a neighborhood V of p such that all points in V belong to the same side of the tangent space T_pS.

   (b) State the global version of the Gauss-Bonnet Theorem.

   (c) Let $S \subset \mathbb{R}^3$ be a regular closed orientable surface which is not homeomorphic to a sphere. Prove or disprove that there are points on S where the Gaussian curvature is positive, negative, and zero.

대학원 기초시험 [전공심화 Ⅱ]

KAIST 수리과학과

2011 년 1 월 20 일

1. 시험 과목: 선형대수학, 해석학, 전공심화 I, 전공심화 Ⅱ, 전공심화 Ⅲ
2. 시험 과목 범위: 기출문제와 해당과목 강의내용이 시험범위를 규정한다.
   - 선형대수학: 선형대수학개론 (MAS109), 선형대수학 (MAS212)
   - 해석학: 해석학 I (MAS241), 해석학 Ⅱ (MAS242)
   - 전공심화 I: 현대대수학 I (MAS311), 현대대수학 Ⅱ (MAS312), 위상수학 (MAS331), 미분기하학개론 (MAS321)
   - 전공심화 Ⅱ: 복소변수함수론 (MAS341), 르베그적분론 (MAS441)
   - 전공심화 Ⅲ: 수리통계학 (MAS355)
3. 시험 문항수와 시간
   - 선형대수학: 선형대수학 6 문제, 90 분
   - 해석학: 해석학 6 문제, 90 분
   - 전공심화 I: 현대대수학 4 문제, 위상수학과 미분기하학 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 Ⅱ: 복소변수함수론 4 문제, 르베그적분론 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 Ⅲ: 수리통계학 6 문제, 90 분
4. 2012 년도부터 입학하는 석사과정 학생들은 선형대수학과 해석학, 전공심화 I, 전공심화 Ⅱ 시험을 보아야 한다. 단, 학부에서 수학을 전공하지 않은 학생은 전공심화 I 또는 전공심화 Ⅱ를 전공심화 Ⅲ으로 대체할 수 있다.
5. 전공심화 I과 Ⅱ에서는 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시한다.
6. 시험 시간표와 과목
   - 10:00–11:30 : 선형대수학
   - 12:30–14:00 : 해석학
   - 14:30–16:00 : 전공심화 I
   - 16:30–18:00 : 전공심화 Ⅱ

다음 8 문제 중에서 6 문제에 답하시오. 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시하시오.

1. Show that $f(z) = x + iy^2$ is nowhere analytic.

2. Evaluate $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, where $a, b > 0$ with $a \neq b$.

3. Suppose that f is entire and $|f(z)| \leq 1 + |z|$. Show that f is a polynomial of degree at most 1.

4. Given f analytic in $|z| < 2$, bounded there by 2, and such that $f(1) = 0$, find the best possible bound for $|f(\frac{1}{4})|$.

5. Let $(X, \mathcal{A})$ be a measurable space and f be defined on X to Y. Let $\mathcal{C}$ be a collection of subsets of Y such that $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ for every $E \in \mathcal{C}$. Show that $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ for any set F which belongs to the σ-algebra generated by $\mathcal{C}$.

6. Find
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

7. Prove that if $f_n \to f$ in L^p and $g_n \to g$ in L^q where $1 \leq p \leq \infty$ and $1/p + 1/q = 1$, then $f_n g_n \to fg$ in L^1.

8. Let $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ be a product measurable space of two measurable spaces $(X, \mathcal{A})$ and $(Y, \mathcal{B})$. If $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, then show that $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \mathcal{B}$ for each $x \in X$.

대학원 기초시험 [전공심화 Ⅲ]

KAIST 수리과학과

2011 년 1 월 20 일

1. 시험 과목: 선형대수학, 해석학, 전공심화 I, 전공심화 Ⅱ, 전공심화 Ⅲ

2. 시험 과목 범위: 기출문제와 해당과목 강의내용이 시험범위를 규정한다.

   - 선형대수학: 선형대수학개론 (MAS109), 선형대수학 (MAS212)
   - 해석학: 해석학 I (MAS241), 해석학 Ⅱ (MAS242)
   - 전공심화 I: 현대대수학 I (MAS311), 현대대수학 Ⅱ (MAS312), 위상수학 (MAS331), 미분기하학개론 (MAS321)
   - 전공심화 Ⅱ: 복소변수함수론 (MAS341), 르베그적분론 (MAS441)
   - 전공심화 Ⅲ: 수리통계학 (MAS355)

3. 시험 문항수와 시간

   - 선형대수학: 선형대수학 6 문제, 90 분
   - 해석학: 해석학 6 문제, 90 분
   - 전공심화 I: 현대대수학 4 문제, 위상수학과 미분기하학 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 Ⅱ: 복소변수함수론 4 문제, 르베그적분론 4 문제, 총 8 문제 중에서 6 문제를 선택, 90 분
   - 전공심화 Ⅲ: 수리통계학 6 문제, 90 분

4. 2012 년도부터 입학하는 석사과정 학생들은 선형대수학과 해석학, 전공심화 I, 전공심화 Ⅱ 시험을 보아야 한다. 단, 학부에서 수학을 전공하지 않은 학생은 전공심화 I 또는 전공심화 Ⅱ를 전공심화 Ⅲ으로 대체할 수 있다.

5. 전공심화 I과 Ⅱ에서는 선택한 6 문제를 문제지와 답안지에 반드시 표시한다.

6. 시험 시간표와 과목

   - 10:00–11:30 : 선형대수학
   - 12:30–14:00 : 해석학
   - 14:30–16:00 : 전공심화 I
   - 16:30–18:00 : 전공심화 Ⅱ

1. Box I contains three red balls and seven blue balls and box Ⅱ contains four white balls and six black balls. One ball is drawn at random from box I. If a red ball is drawn from box I, six balls are selected at random *with replacement* from box Ⅱ. If a blue ball is drawn from box I, six balls are selected at random *without replacement* from box Ⅱ. Let the random variable X be the number of black balls selected from box Ⅱ.
   (a) Find the probability distribution of X.
   (b) Find $E(X)$.

2. Let (X, Y) have the joint pdf

$$f(x, y) = 6(y - x), \; 0 < x < y < 1.$$

   (a) Find $P(X + Y < 1)$.
   (b) Find the probability distribution of $Z = Y - X$.

3. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a random sample from a Poisson distribution with mean θ. Find $E(X_1 + 2X_2 + 3X_3 | \sum_1^n X_i)$.

4. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a random sample from the pdf

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \; 0 < x < \infty.$$

   Find the mle of $P(X \leq 2)$.

5. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a random sample from the beta distribution with $\alpha = \beta = \theta$ and $\Omega = \{\theta : \; \theta = 1, 2\}$. Show that the likelihood ratio test statistic for testing $H_0 : \; \theta = 1$ vs. $H_1 : \; \theta = 2$ is a function of the statistic $W = \sum_{i=1}^n \log X_i + \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$.

6. Let X be a $N(0, \theta)$ random variable for $0 < \theta < \infty$.
   (a) Find the Fisher information of θ.
   (b) If $X_1, \cdots, X_n$ is a random sample from this distribution, show that the MLE of θ is an efficient estimator of θ.